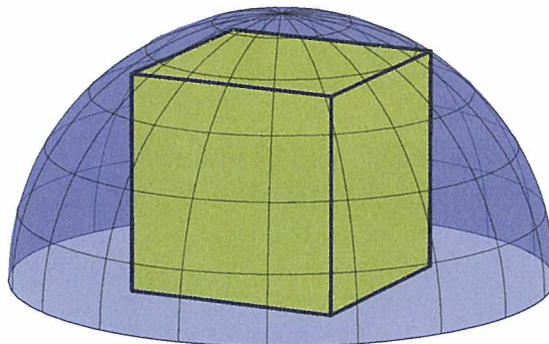




Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään. Tähdellä (★) merkittyjen tehtävien maksimipistemäärä on 9, muiden tehtävien maksimipistemäärä on 6.

1.
  - a) Ratkaise yhtälö  $7x^7 + 6x^6 = 0$ .
  - b) Sievennä lauseke  $(\sqrt{a} + 1)^2 - a - 1$ .
  - c) Millä  $x$ :n arvoilla pätee  $\frac{3}{3 - 2x} < 0$ ?
  
2.
  - a) Laske integraali  $\int_0^1 (e^x + 1) dx$ .
  - b) Derivoi funktio  $x \sin x$ .
  - c) Minkä luvun 2-kantainen logaritmi on 5?
  
3.
  - a) Kolmion sivujen pituudet ovat 2, 4 ja 5. Laske kolmion suurin kulma asteen kymmenesosan tarkkuudella.
  - b) Määritä toisen asteen yhtälön  $x^2 + px + q = 0$  kertoimet  $p$  ja  $q$ , kun yhtälön juuret ovat  $-2 - \sqrt{6}$  ja  $-2 + \sqrt{6}$ .
  
4. Puolipallon sisällä on kuutio siten, että sen yksi sivutahko on puolipallon pohjatasolla ja vastakkaisen sivutahkon kärkipisteet ovat pallopinnalla. Kuinka monta prosenttia kuution tilavuus on puolipallon tilavuudesta?



5. Vektoreiden  $\vec{a}$  ja  $\vec{b}$  summa on vektori  $4\vec{i} + \vec{j}$  ja niiden pistetulo on  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$ . Vektori  $\vec{b}$  on yhdensuuntainen vektorin  $\vec{i}$  kanssa. Määritä vektorit  $\vec{a}$  ja  $\vec{b}$ .
6. a) Laatikossa on kaksi eriväristä palloa. Laatikosta nostetaan umpimähkään yksi pallo, pannaan se takaisin ja nostetaan taas umpimähkään pallo. Mikä on todennäköisyys, että nostetut pallot ovat eriväriset?
- b) Mikä on vastaava todennäköisyys, jos laatikossa onkin kolme keskenään eriväristä palloa ja samalla tavalla nostetaan kaksi palloa?

7. Suorakulmion kaksi kärkeä on  $x$ -akselilla ja kaksi käyrällä

$$y = \frac{4}{2 + x^2}.$$

Mitkä ovat suorakulmion sivujen pituudet, kun sen pinta-ala on suurin mahdollinen?

8. Tietunnelin poikkileikkaus on osa alaspäin aukeavaa paraabelia. Tien leveys on 10 m, ja tunnelin poikkileikkauksen pinta-ala on  $25,0 \text{ m}^2$ . Määritä tunnelin korkeus senttimetrin tarkkuudella.
9. Tutki, kuinka monta juurta yhtälöllä

$$3 \tan x - 1 = 4x$$

on välillä  $]-\pi/2, \pi/2[$ .

10. Kolmio  $K_1$  on tasakylkinen kolmio, jonka kanta on  $a$  ja korkeus  $b$ . Kolmio  $K_2$  on suorakulmainen kolmio, jonka kateettien pituudet ovat  $a$  ja  $b$ . Kummalla kolmiolla on pidempi piiri?
11. Määritä ne geometriset sarjat, joiden summa on 2 ja toinen termi on  $\frac{3}{8}$ . Anna vastauksena sarjan ensimmäinen termi ja sarjan suhdeluku.
12. Osoita, että muotoa  $p^2 - 1$  oleva luku on jaollinen luvulla 12, kun  $p$  on alkuluku ja suurempi kuin 3.

**13.** Funktion  $f$  kuvaajan kaarenpituus välillä  $[a, b]$  on

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Laske funktion  $\ln x$  kuvaajan kaarenpituus välillä  $[1, 2]$  puolisuunnikassäännöllä jakamalla väli neljään osaväliin. Anna vastaus kolmen desimaalin tarkkuudella.

**★14.** Tarkastellaan lukujonoa  $a_1 = \frac{9}{10}$ ,  $a_2 = \frac{99}{100}$ ,  $a_3 = \frac{999}{1000}$ ,  $\dots$

- Määritä luvun  $a_n$  lauseke indeksin  $n$  avulla lausuttuna. (2 p.)
- Osoita, että lukujono on kasvava ja että  $a_n < 1$  kaikilla  $n = 1, 2, 3, \dots$  (3 p.)
- Määritä  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . (2 p.)
- Mikä luku on päättymätön desimaalikehitelmä  $0,999\dots$ ? (2 p.)

**★15.** Funktio  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  määritellään seuraavasti:

$$f(x) = 2^{1-n} \sin x, \quad \text{kun } x \in [(n-1)\pi, n\pi[, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- Piirrä funktion kuvaaja, kun  $x \in [0, 3\pi]$ . (2 p.)
- Laske  $\int_0^{3\pi} f(x) dx$ . (2 p.)
- Laske  $\int_0^{n\pi} f(x) dx$ . (3 p.)
- Määritä  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} f(x) dx$ . (2 p.)