YLIOPPILASTUTKINTO-
LAUTAKUNTA

29.9.2010

MATEMATIIKAN KOE
PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään. Tähdellä ($\star$) merkittyjen tehtävien maksimipistemäärä on 9, muiden tehtävien maksimipistemäärä on 6.

1. **a)** Sievennä lauseke $(a+b)^2-(a-b)^2$.

b) Ratkaise yhtälö $\tan x=\sqrt{3}$.

c) Määritä $f'(-3)$, kun $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$.

2. **a)** Ratkaise epäyhtälö $x\sqrt{7}-3\leq 4x$.

b) Laske integraali $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$.

c) Ratkaise yhtälö $x^4-3x^2-4=0$.

3. **a)** Suoran vektorimuotoinen yhtälö on

$$\overrightarrow{OP}=\bar{i}+2\bar{j}+2\bar{k}+t(2\bar{i}+\bar{j}+s\bar{k}),$$

missä $t\in\mathbb{R}$ on suoran parametri. Määritä sellainen luku s, että suora on tasossa $3x+4y+5z=21$.

b) Olkoon F se funktion $f(x)=(2-x)^3$ integraalifunktio, jolle $F(0)=0$. Määritä $F(1)$.

4. Funktion $f(x)=ax^2+bx+c$ kuvaaja kulkee pisteiden $(-1,12)$, $(0,5)$ ja $(2,-3)$ kautta. Määritä lausekkeen $a+b+c$ arvo.

5. Vene A ylittää joen 45 asteen kulmassa nopeudella 16 km/h, ja vene B ylittää joen 30 asteen kulmassa nopeudella 14 km/h. Molemmat kulmat on mitattu joen poikkisuunnasta. Veneet lähtevät yhtä aikaa. Kumpi veneistä pääsee vastarannalle aikaisemmin?

6. Monivalintatestissä on 25 väitettä ja kussakin kaksi vastausvaihtoehtoa. Opiskelija tietää oikean vastauksen 10 väitteeseen, mutta joutuu arvaamaan loput. Millä todennäköisyydellä hän läpäisee testin, kun läpipääsyyn vaaditaan 15 oikeaa vastausta?

7. Määritä funktion

$$f(x) = \cos x - \tfrac{1}{2}\cos 2x$$

suurin ja pienin arvo. Missä pisteissä suurin arvo saavutetaan?

8. Jono (a_n) on aritmeettinen jono. Osoita, että jono (b_n), missä $b_n = 3^{a_n}$, on geometrinen. Millä jonoa (a_n) koskevalla ehdolla jono (b_n) on aidosti vähenevä?

9. Arkhimedeen lain mukaan vedessä kelluvan esineen syrjäyttämän veden paino ja esineen paino ovat samat. Pyöreästä ja tasapaksusta puutukista jää veden yläpuolelle sen halkaisijasta viidesosa. Määritä tukin tiheys. Veden tiheytenä käytetään arvoa 1,00 $\mathrm{kg/dm^3}$.

10. Suora kulkee kiinteän pisteen (a, b), $a > 0$, $b > 0$, kautta ja muodostaa positiivisten koordinaattiakselien kanssa kolmion. Mikä on tällaisen kolmion pienin mahdollinen pinta-ala?

11. Olkoot A, B ja C lauseita. Tutki, ovatko lauseet

a) $A \vee B$, **b)** $(A \vee \neg B) \vee (C \vee B)$

tautologioita.

12. Määritä a siten, että polynomi

$$P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + a$$

on jaollinen binomilla $2x - 1$. Määritä tätä a:n arvoa vastaavat yhtälön $P(x) = 0$ juuret.

13. Määritä sellainen kerroin a, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-3x}, & \text{kun } x \geq 0, \\ 0, & \text{kun } x < 0, \end{cases}$$

on erään satunnaismuuttujan X tiheysfunktio. Mikä on tällöin kertymäfunktion lauseke? Laske $P(X \geq t)$, kun $t \geq 0$.

⋆14. **a)** Osoita, että funktiolla

$$f(x) = \ln x + x + 1, \quad x > 0,$$

on käänteisfunktio $g = f^{-1}$. (2 p.)

b) Määritä käänteisfunktion derivaatta $g'(2)$. (2 p.)

c) Missä pisteissä funktion f kuvaaja leikkaa käänteisfunktion kuvaajan? (3 p.)

d) Kuinka suuressa kulmassa kuvaajat leikkaavat toisensa? (2 p.)

⋆15. **a)** Miten määritellään tylppäkulmainen kolmio? (2 p.)

b) Johda kolmion pinta-alan kaava käyttäen hyväksi seuraavia tietoja:

- Suorakulmion pinta-ala on ab, kun a ja b ovat suorakulmion sivujen pituudet.
- Suorakulmion lävistäjä jakaa suorakulmion kahteen pinta-alaltaan yhtä suureen osaan.

(4 p.)

c) Johda puolisuunnikkaan pinta-alan kaava. (3 p.)